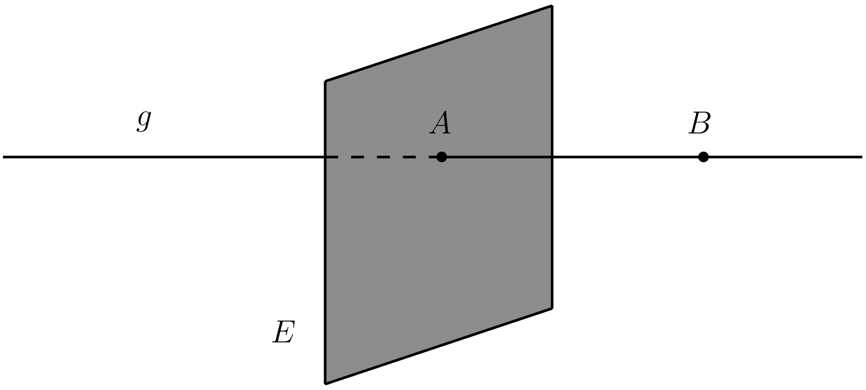
HMF 1 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(1\,|\,0\,|\,3)$ und $B(-2\,|\,3\,|\,6)$.
g steht senkrecht auf einer Ebene E, die den Punkt A enthält.



1.1 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.

(2 P)

1.2 Es existieren zwei Punkte P_1 und P_2 auf g, deren Abstand zu B doppelt so groß ist wie deren Abstand zu A.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2.

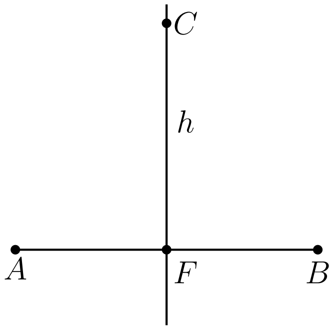
(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analytische Geometrie (Pool 1)
1.1	Der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E. Somit ist $E:\ -3\,x_1 + 3\,x_2 + 3\,x_3 = -3\cdot 1 + 3\cdot 0 + 3\cdot 3 = 6$ eine mögliche Koordinatengleichung. 2 P
1.2	Es ist $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$, so dass die Koordinaten der gesuchten Punkte $P_1(0\,|\,1\,|\,4)$ und $P_2(4\,|\,-3\,|\,0)$ lauten. 3 P

HMF 2 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben sind die Punkte $A(4\,|\,6\,|\,2)$ und $F(3\,|\,8\,|\,4)$.

Die Gerade h ist eine Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.



2.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B.

(2 P)

2.2 Der Punkt $C(9\,|\,12\,|\,z)$ mit $z \in \mathbb{R}$ liegt auf der Geraden h.
Bestimmen Sie die Zahl z.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analytische Geometrie (Pool 1)
2.1	$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ Also ist B der Punkt mit den Koordinaten $B(2\,|\,10\,|\,6)$. 2 P
2.2	$h \perp \overline{AF} \Leftrightarrow \overrightarrow{FC} \perp \overrightarrow{AF} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9-3 \\ 12-8 \\ z-4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ $\Leftrightarrow -6 + 8 + (z-4) \cdot 2 = 0$ $\Leftrightarrow -6 + 2 \cdot z = 0 \Leftrightarrow z = 3$ 3 P

HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Gegeben sind die Geraden g_k durch $g_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$ und

eine Gerade h mit $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.1 Zeigen Sie, dass die Gerade h zu keiner der Geraden g_k parallel verläuft.

(2 P)

3.2 Es existiert ein $k \in \mathbb{R}$, so dass sich die beiden Geraden g_k und h schneiden. Bestimmen Sie dieses k.

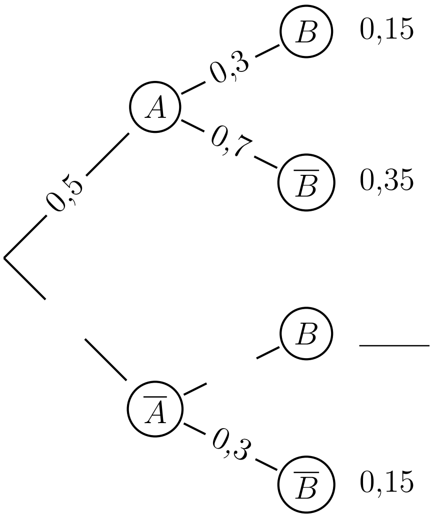
(3 P)

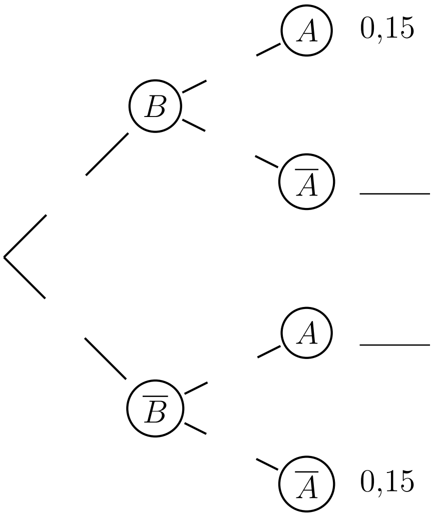
	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 2)
3.1	Wegen $t \cdot 0 \neq -2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $t \cdot \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ für kein $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Also ist $h \nparallel g_k$ für alle $k \in \mathbb{R}$. 2 P
3.2	$g_k \cap h$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \left\lvert \begin{array}{rcl} 2 & = & 2+sk \\ 2-2r & = & 8 \\ r & = & sk+s \end{array} \right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert \begin{array}{rcl} sk & = & 0 \\ r & = & -3 \\ r & = & sk+s \end{array} \right\rvert$ Aus der dritten Zeile folgt mit den Zeilen 1 und 2, dass $s = -3$ ist. Wegen $sk = 0$ ist damit $k = 0$. 3 P

HMF 4 - Stochastik (Pool 1)

Gegeben sind ein Zufallsexperiment und die Ereignisse A und B.

4.1 Vervollständigen Sie das Baumdiagramm und das umgekehrte Baumdiagramm.





(3 P)

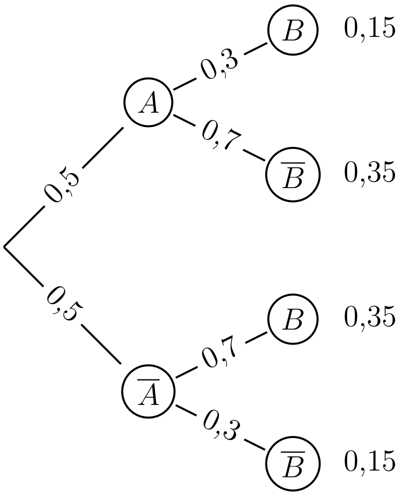
4.2 Vervollständigen Sie die dazu gehörende Vierfeldertafel.

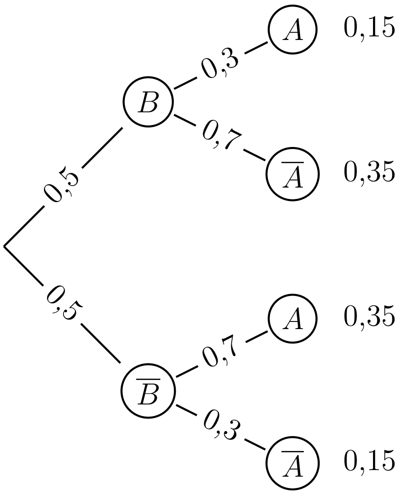
	A	$\overline{A}$	$\sum$
B			
$\overline{B}$			
$\sum$			1

(2 P)

Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Stochastik (Pool 1)

4.1





3 P

4.2

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	0,15	0,35	0,5
$\overline{B}$	0,35	0,15	0,5
$\sum$	0,5	0,5	1

2 P

HMF 5 - Stochastik (Pool 1)

Ein Würfel, bei dem zwei Würfelflächen mit einer 1 und vier Würfelflächen mit einer 4 beschriftet sind, wird zweimal nacheinander geworfen.
Die Tabelle stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: *„Summe beider Wurfergebnisse“ dar.*

a	2	5	8
$P(X = a)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

5.1 Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von X genau 6 beträgt.

(2 P)

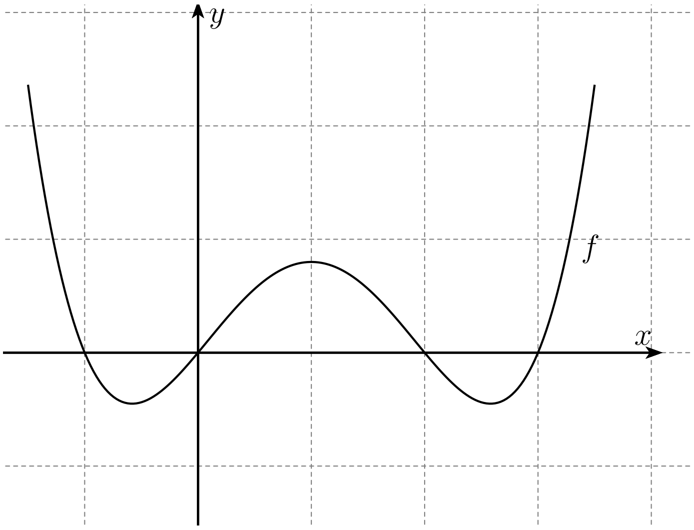
5.2 Die Zahl 1 soll auf den beiden Würfelflächen durch eine reelle Zahl z ersetzt werden, so dass der Erwartungswert von X dann 7 beträgt.
Bestimmen Sie die Zahl z.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Stochastik (Pool 1)
5.1	Es ist $E(X) = \frac{1}{9} \cdot 2 + \frac{4}{9} \cdot 5 + \frac{4}{9} \cdot 8 = 6.$ 2 P
5.2	Die möglichen Werte, die die Zufallsvariable X annehmen kann, sind $2z$, $z + 4$ und 8. Mit $E(X) = \frac{1}{9} \cdot 2z + \frac{4}{9} \cdot (z + 4) + \frac{4}{9} \cdot 8 = 7$ ist dann $2z + 4 \cdot (z + 4) + 32 = 63 \Leftrightarrow 6z + 48 = 63 \Leftrightarrow z = 2{,}5.$ 3 P

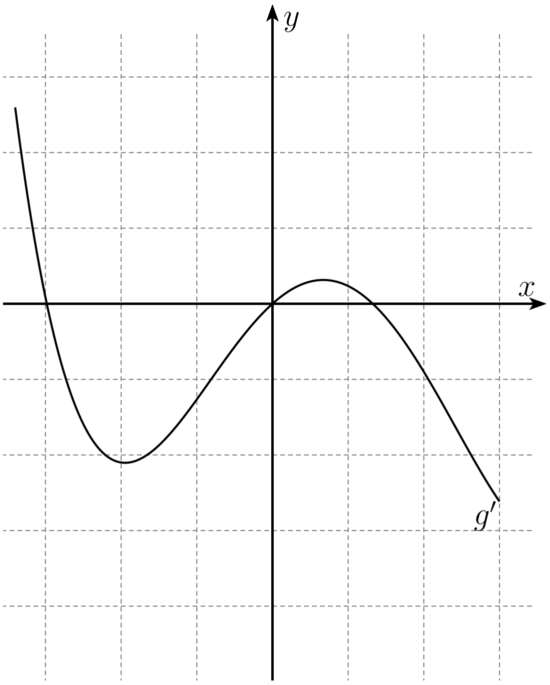
HMF 6 - Analysis (Pool 1)

6.1 Es ist der Graph einer Funktion f dargestellt. Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in dasselbe Koordinatensystem.

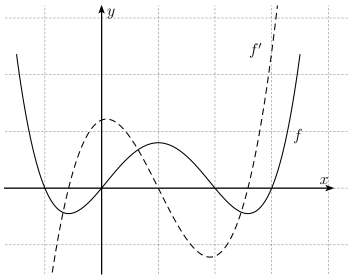
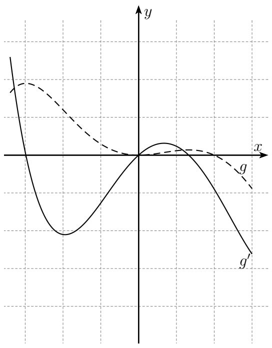


(2 P)

6.2 Zu einer Funktion g mit $g(0) = 0$ ist der Graph der Ableitungsfunktion g' dargestellt. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion g in dasselbe Koordinatensystem.



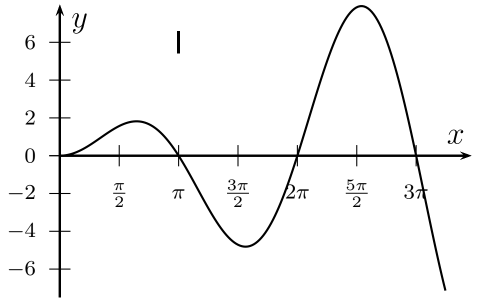
(3 P)

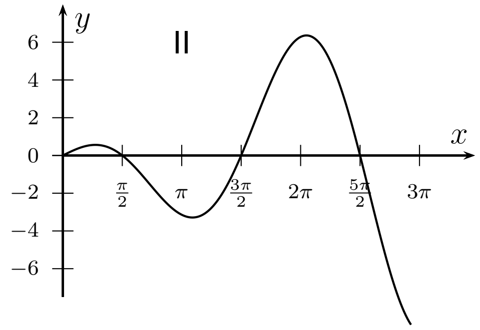
	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analysis (Pool 1)
6.1	 *Die Nullstellen von f' müssen an den Extremstellen von f liegen. Außerdem müssen die Vorzeichen der Funktionswerte von f' jeweils richtig gewählt sein.* 2 P
6.2	 *Der Graph von g muss durch den Ursprung verlaufen. Die Extremstellen von g sowie die Art der Extrema müssen jeweils richtig gewählt sein.* 3 P

HMF 7 - Analysis (Pool 1)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x \cdot \sin(x)$ für $x \geq 0$.

7.1 Einer der beiden Graphen I oder II gehört zur Funktion f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie Ihre Entscheidung.





(2 P)

7.2 Berechnen Sie die Steigung des Graphen der Funktion f an der Stelle π.

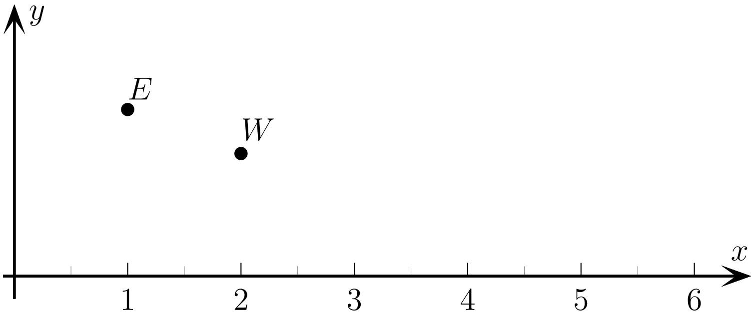
(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Analysis (Pool 1)
7.1	Graph I Begründung: Graph II scheidet aus, da $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) \neq 0$ ist. 2 P
7.2	$f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$ $f'(\pi) = \sin(\pi) + \pi \cdot \cos(\pi) = 0 + \pi \cdot (-1) = -\pi$ 3 P

HMF 8 - Analysis (Pool 2)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 2\,x \cdot \mathrm{e}^{-x}$ für $x \geq 0$.

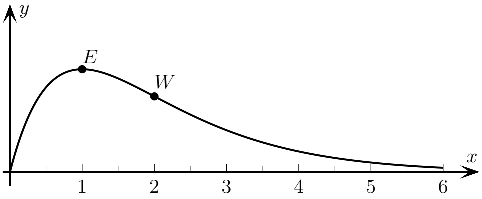
8.1 Der Punkt E ist der einzige Extrempunkt auf dem Graphen von f, der Punkt W der einzige Wendepunkt. Skizzieren Sie in dem abgedruckten Koordinatensystem den Graphen von f für $0 \leq x \leq 6$.



(2 P)

8.2 Durch $F(x) = -2 \cdot (x+1) \cdot \mathrm{e}^{-x}$ ist eine Stammfunktion von f gegeben. Berechnen Sie den Inhalt A der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Analysis (Pool 2)
8.1	 *Es müssen E als einziger Extrem- und W als einziger Wendepunkt auf dem Graphen von f sowie 0 als Nullstelle und die x-Achse als Asymptote erkennbar sein.* 2 P
8.2	Sei $A(a)$ der Flächeninhalt zwischen x-Achse und Graph über dem Intervall $[0\,;\,a]$. $A(a) = \int\limits_0^a 2x \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ $= \Big[-2 \cdot (x+1) \cdot \mathrm{e}^{-x}\Big]_0^a$ $= -2 \cdot (a+1) \cdot \mathrm{e}^{-a} + 2 \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^{-0}$ $= -2 \cdot (a+1) \cdot \mathrm{e}^{-a} + 2$ Wegen $A(a) \to 2$ für $a \to \infty$ ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse 2. 3 P

HMF-Bewertungsbogen für: ______________________________

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analytische Geometrie (Pool 1)
1.1	Der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E. Somit ist $E:\ -3\,x_1 + 3\,x_2 + 3\,x_3 = -3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 6$ eine mögliche Koordinatengleichung. 2 P
1.2	Es ist $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, so dass die Koordinaten der gesuchten Punkte $P_1(0 \mid 1 \mid 4)$ und $P_2(4 \mid -3 \mid 0)$ lauten. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analytische Geometrie (Pool 1)
2.1	$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ Also ist B der Punkt mit den Koordinaten $B(2 \mid 10 \mid 6)$. 2 P
2.2	$h \perp \overline{AF} \Leftrightarrow \overrightarrow{FC} \perp \overrightarrow{AF} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9-3 \\ 12-8 \\ z-4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ $\Leftrightarrow -6 + 8 + (z-4) \cdot 2 = 0$ $\Leftrightarrow -6 + 2 \cdot z = 0 \Leftrightarrow z = 3$ 3 P

Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 2)

3.1

Wegen $t \cdot 0 \neq -2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $t \cdot \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ für kein $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Also ist $h \nparallel g_k$ für alle $k \in \mathbb{R}$.

2 P

3.2

$g_k \cap h$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix}$$

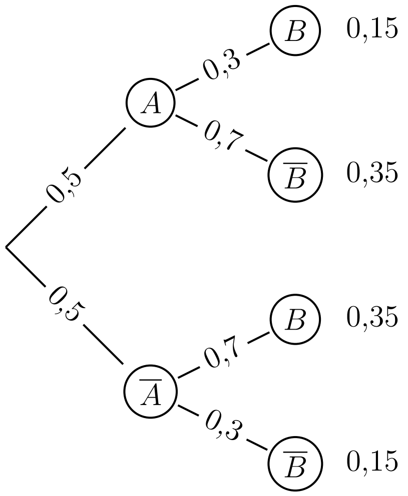
$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} 2 & = & 2+sk \\ 2-2r & = & 8 \\ r & = & sk+s \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} sk & = & 0 \\ r & = & -3 \\ r & = & sk+s \end{array} \right|$$

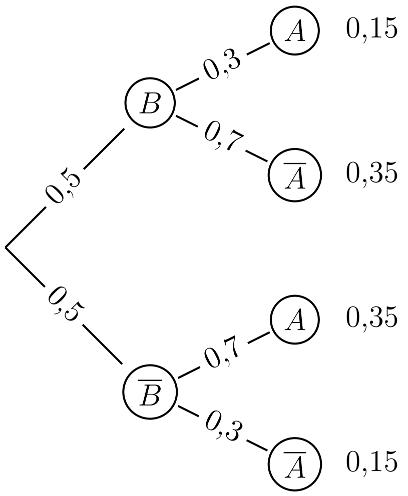
Aus der dritten Zeile folgt mit den Zeilen 1 und 2, dass $s = -3$ ist.
Wegen $sk = 0$ ist damit $k = 0$.

3 P

Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Stochastik (Pool 1)

4.1





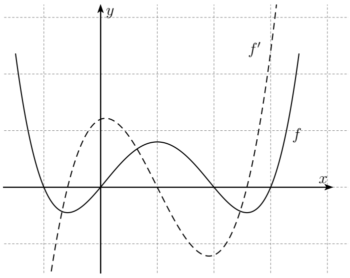
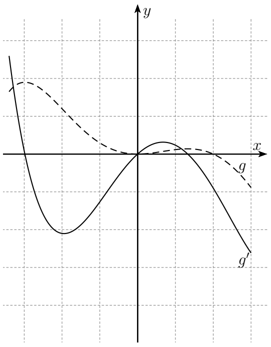
3 P

4.2

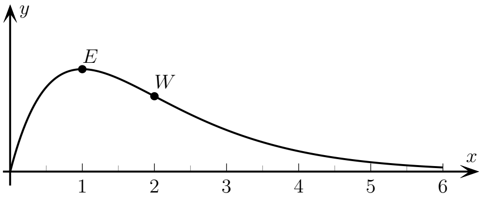
	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	0,15	0,35	0,5
$\overline{B}$	0,35	0,15	0,5
$\sum$	0,5	0,5	1

2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Stochastik (Pool 1)
5.1	Es ist $E(X) = \frac{1}{9} \cdot 2 + \frac{4}{9} \cdot 5 + \frac{4}{9} \cdot 8 = 6$. 2 P
5.2	Die möglichen Werte, die die Zufallsvariable X annehmen kann, sind $2z$, $z + 4$ und 8. Mit $E(X) = \frac{1}{9} \cdot 2z + \frac{4}{9} \cdot (z + 4) + \frac{4}{9} \cdot 8 = 7$ ist dann $2z + 4 \cdot (z + 4) + 32 = 63 \Leftrightarrow 6z + 48 = 63 \Leftrightarrow z = 2{,}5$. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analysis (Pool 1)
6.1	 *Die Nullstellen von f' müssen an den Extremstellen von f liegen. Außerdem müssen die Vorzeichen der Funktionswerte von f' jeweils richtig gewählt sein.* 2 P
6.2	 *Der Graph von g muss durch den Ursprung verlaufen. Die Extremstellen von g sowie die Art der Extrema müssen jeweils richtig gewählt sein.* 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Analysis (Pool 1)
7.1	Graph I Begründung: Graph II scheidet aus, da $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) \neq 0$ ist. 2 P
7.2	$f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$ $f'(\pi) = \sin(\pi) + \pi \cdot \cos(\pi) = 0 + \pi \cdot (-1) = -\pi$ 3 P

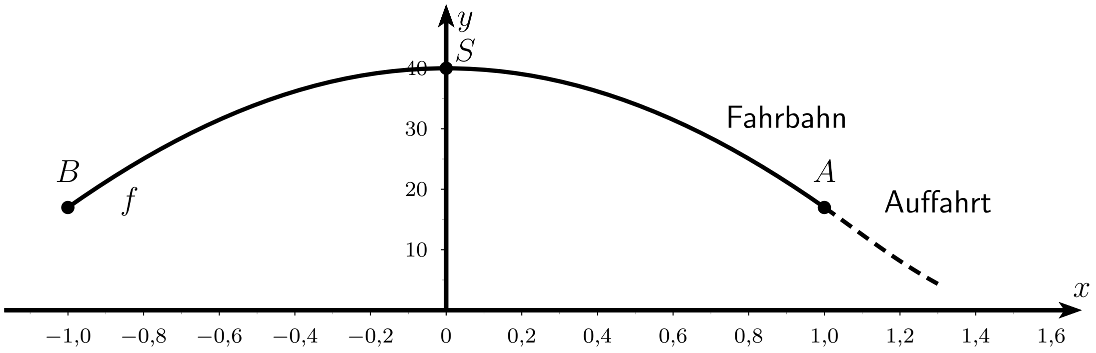
	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Analysis (Pool 2)
8.1	 *Es müssen E als einziger Extrem- und W als einziger Wendepunkt auf dem Graphen von f sowie 0 als Nullstelle und die x-Achse als Asymptote erkennbar sein.* 2 P
8.2	Sei $A(a)$ der Flächeninhalt zwischen x-Achse und Graph über dem Intervall $[0\,;\,a]$. $A(a) = \int\limits_0^a 2x \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ $= \big[-2 \cdot (x+1) \cdot \mathrm{e}^{-x}\big]_0^a$ $= -2 \cdot (a+1) \cdot \mathrm{e}^{-a} + 2 \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^{-0}$ $= -2 \cdot (a+1) \cdot \mathrm{e}^{-a} + 2$ Wegen $A(a) \to 2$ für $a \to \infty$ ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse 2. 3 P

Erstkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: ________

Zweitkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: ________

Aufgabe 1: Analysis

Über einen Kanal soll eine neue Autobahnbrücke gebaut werden. Zur Modellierung wird ein Koordinatensystem so gelegt, dass sich die x-Achse auf Höhe der Wasseroberfläche befindet. Eine Einheit in x-Richtung entspricht einem Kilometer in der Wirklichkeit, eine Einheit in y-Richtung entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.
Der Verlauf der Fahrbahn kann zwischen den Punkten $A(1 \mid 17)$ und $B(-1 \mid 17)$ durch den Graphen einer auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = x^4 - 24\,x^2 + 40$ beschrieben werden. Rechts vom Punkt A wird der Verlauf der Fahrbahn durch eine Auffahrt fortgesetzt.
Die Abbildung zeigt den Verlauf der Fahrbahn und eines Teils der Auffahrt.



a) a1) Geben Sie ein Argument dafür an, dass der Graph der ganzrationalen Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse ist. (1 P)

a2) Bestimmen Sie an der Stelle $-0{,}5$ die Steigung der Fahrbahn und geben Sie den Wert in Prozent an. (2 P)

a3) Berechnen Sie die Stellen, an denen die größte Steigung bzw. das größte Gefälle der Fahrbahn von B nach A vorliegt. (5 P)

b) Bei einem anderen Entwurf der Autobahnbrücke wird der Verlauf der Fahrbahn zwischen A und B durch den Graphen einer quadratischen Funktion g mit dem Scheitelpunkt $S(0 \mid 40)$ beschrieben.

b1) Leiten Sie eine Funktionsgleichung von g her. (2 P)

Verwenden Sie im Folgenden $g(x) = -23\,x^2 + 40$.

b2) Zeigen Sie, dass die durch den Graphen von g beschriebene Fahrbahn nirgends unterhalb der durch den Graphen von f beschriebenen Fahrbahn verläuft. (3 P)

b3) Bestimmen Sie den maximalen vertikalen Abstand zwischen den durch die Funktionen f und g beschriebenen Fahrbahnen. (5 P)

b4) Berechnen Sie den durchschnittlichen vertikalen Abstand zwischen den durch die Funktionen f und g beschriebenen Fahrbahnen. (2 P)

c) Für jede reelle Zahl a ist die Funktion h_a mit

$$h_a(x) = 162{,}56 \cdot x^2 \cdot e^{-2 \cdot x^2} + a$$

gegeben.

c1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von h_a achsensymmetrisch zur y-Achse ist. (1 P)

c2) Für eine bestimmte reelle Zahl a wird die im Punkt A an die Fahrbahn anschließende Auffahrt mit Hilfe der Funktion h_a beschrieben.
Bestimmen Sie die Zahl a. (2 P)

c3) Leiten Sie her, dass

$$h_a'(x) = 325{,}12 \cdot x \cdot (1 - 2x^2) \cdot e^{-2 \cdot x^2}$$

eine Funktionsgleichung der ersten Ableitung von h_a ist. (3 P)

c4) Untersuchen Sie, ob die Steigungen der durch den Graphen der Funktion f beschriebenen Fahrbahn und der durch den Graphen der Funktion h_a beschriebenen Auffahrt an der Stelle 1 übereinstimmen. (2 P)

d) Durch f_k mit

$$f_k(x) = k \cdot x^4 - (23 + k) \cdot x^2 + 40 \qquad ; \qquad k > 0$$

ist eine Funktionenschar gegeben. Der Graph der Funktion f_k wird mit G_k bezeichnet.

d1) Zeigen Sie, dass die Funktion f zu der Funktionenschar gehört. (1 P)

d2) Weisen Sie nach, dass jeder Graph G_k durch die Punkte A und S verläuft. (2 P)

d3) Zeigen Sie, dass für alle $k > 0$ der Punkt $\left(\sqrt{\frac{23+k}{2k}} \,\middle|\, -\frac{(23+k)^2}{4\,k} + 40\right)$ der einzige Punkt auf G_k mit waagerechter Tangente und positiver x-Koordinate ist. (6 P)

d4) Es wird gefordert, dass der Fahrbahnverlauf von S nach A durch einen Graphen G_k beschrieben wird, der außer im Punkt S keine weitere waagerechte Tangente hat.
Untersuchen Sie, für welche Zahlen $k > 0$ diese Forderung erfüllt ist. (3 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Da in der Funktionsgleichung der ganzrationalen Funktion f nur geradzahlige Exponenten auftauchen, ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse.	1		
Wegen $f'(-0{,}5) = 23{,}5$ liegt im Punkt C eine Steigung von $23{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}} = 2{,}35\,\%$ vor.	1	1	
Zu ermitteln ist das globale Minimum bzw. Maximum von f' im Intervall $[-1;1]$. Es gilt $f'(x) = 4\,x^3 - 48\,x$ und $f''(x) = 12\,x^2 - 48$. Notwendig für eine lokale Extremstelle x von f' ist $f''(x) = 0$. $f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 12\,x^2 - 48 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2 \lor x = 2$ Da diese Stellen außerhalb des Intervalls $[-1;1]$ liegen, besitzt die Funktion f' im Intervall $[-1;1]$ keine lokale Extremstelle. Da $f'(-1) = 44$ und $f'(1) = -44$ sind, tritt die größte Steigung bzw. das größte Gefälle der Fahrbahn an den Stellen -1 bzw. 1 auf.	1	2 2	
Teilaufgabe b) Eine Gleichung einer quadratischen Funktion in Scheitelpunktform mit Scheitelpunkt $(x_s\vert y_s)$ lautet $g(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$. Da $S(0\vert 40)$ der Scheitelpunkt ist, folgt $g(x) = ax^2 + 40$. Aus $g(1) = 17$ folgt $a = -23$ und damit $g(x) = -23x^2 + 40$.	2		
$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; x^4 - 24\,x^2 + 40 = -23\,x^2 + 40$ $\Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 \cdot (x^2 - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \lor x = 1 \lor x = -1$ Da weiter $f(0{,}5) = 34{,}0625 < 34{,}25 = g(0{,}5)$ gilt und beide Graphen achsensymmetrisch zur y-Achse sind, verläuft die durch den Graphen von g beschriebene Fahrbahn nirgends unterhalb der durch den Graphen von f beschriebenen Fahrbahn.			3
Zu ermitteln ist das globale Extremum der Funktion d mit $d(x) = g(x) - f(x)$ im Intervall $[-1;1]$. Es gilt $d(x) = -23\,x^2 + 40 - (x^4 - 24\,x^2 + 40) = -x^4 + x^2$. Notwendig für eine lokale Extremstelle x von d ist $d'(x) = 0$. $d'(x) = -4x^3 + 2x$ $d'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -4x^3 + 2x = 0$ $\Leftrightarrow\; x = 0 \;\lor\; x = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}71 \;\lor\; x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \approx -0{,}71$ Da zusätzlich $d\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = d\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 0{,}25$ und $d(1) = d(-1) = 0$ ist, beträgt der maximale vertikale Abstand zwischen den durch die Funktionen f und g beschriebenen Fahrbahnen $25\,\mathrm{cm}$.		1 2 2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
$\frac{1}{1-(-1)}\int\limits_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\;dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^4+x^2\right)\;dx=\frac{2}{15}\approx 0{,}13$ Der durchschnittliche vertikale Abstand zwischen den durch die Funktionen f und g beschriebenen Fahrbahnen beträgt ungefähr $13\,\mathrm{cm}$.		2	
Teilaufgabe c) Da für alle $x\in\mathbb{R}$ $h_a(-x)=162{,}56\cdot(-x)^2\cdot e^{-2\cdot(-x)^2}+a=162{,}56\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x^2}+a=h_a(x)$ gilt, ist der Graph von h_a achsensymmetrisch zur y-Achse.		1	
Aus dem Ansatz $h_a(1)=f(1)\;\Leftrightarrow\;162{,}56\cdot 1^2\cdot e^{-2\cdot 1^2}+a=17$ folgt $a\approx -5{,}00$.	2		
$\begin{aligned} h_a'(x) &= 2\cdot 162{,}56\cdot x\cdot e^{-2\cdot x^2}+162{,}56\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x^2}\cdot(-4x)\\ &= 325{,}12\cdot x\cdot e^{-2\cdot x^2}-650{,}24\cdot x^3\cdot e^{-2\cdot x^2}\\ &= 325{,}12\cdot x\cdot(1-2x^2)\cdot e^{-2\cdot x^2}\end{aligned}$		3	
Wegen $f'(1)=-44$ und $h_a'(1)\approx -44{,}0002$ stimmen die Steigungen der durch den Graphen der Funktion f beschriebenen Fahrbahn und der durch den Graphen der Funktion h_a beschriebenen Auffahrt an der Stelle 1 annähernd überein.	2		
Teilaufgabe d) Für $k=1$ gilt $f_1(x)=1\cdot x^4-(23+1)\cdot x^2+40=x^4-24\,x^2+40=f(x)$. Also ist die Funktion f ein Element der Kurvenschar.	1		
Für alle k gilt $f_k(0)=40$ und $f_k(1)=k\cdot 1^4-(23+k)\cdot 1^2+40=k-(23+k)+40=17$. Somit verlaufen alle Graphen der Kurvenschar durch die Punkte A und S.	2		
Es gilt $f_k'(x)=4\,k\cdot x^3-2\cdot(23+k)\cdot x$. Eine waagerechte Tangente an den Graphen von f_k an der Stelle x liegt genau dann vor, wenn $f_k'(x)=0$ ist. $f_k'(x)=0\;\Leftrightarrow\;4\,k\cdot x^3-2\cdot(23+k)\cdot x=0$ $\Leftrightarrow\;x\cdot(4\,k\cdot x^2-2\cdot(23+k))=0\;\Leftrightarrow\;x=0\;\vee\;x^2=\frac{2\cdot(23+k)}{4\,k}$ $\Leftrightarrow\;x=0\;\vee\;x=\sqrt{\frac{23+k}{2k}}\;\vee\;x=-\sqrt{\frac{23+k}{2k}}$		1	2

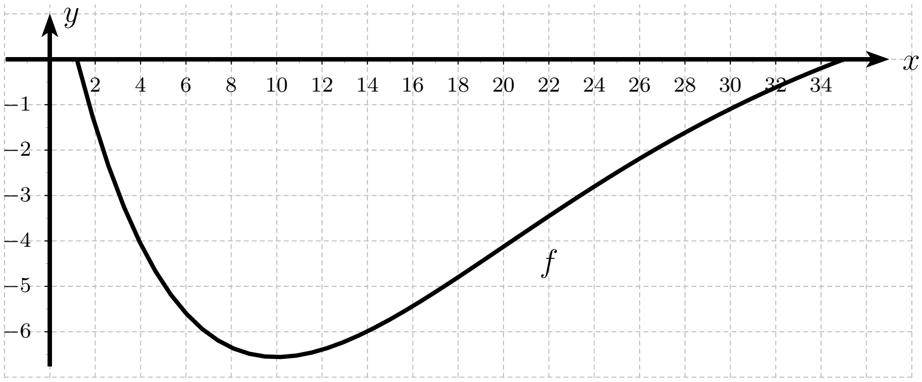
Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
$f_k\left(\sqrt{\frac{23+k}{2k}}\right) = k\cdot\left(\sqrt{\frac{23+k}{2k}}\right)^4 - (23+k)\cdot\left(\sqrt{\frac{23+k}{2k}}\right)^2 + 40$ $= k\cdot\left(\frac{23+k}{2k}\right)^2 - (23+k)\cdot\left(\frac{23+k}{2k}\right) + 40$ $= \frac{(23+k)^2}{4\,k} - \frac{(23+k)^2}{2\,k} + 40 = -\frac{(23+k)^2}{4\,k} + 40$ Damit ist der Punkt $\left(\sqrt{\frac{23+k}{2k}} \mid -\frac{(23+k)^2}{4\,k} + 40\right)$ der einzige Punkt auf G_k mit waagerechter Tangente und positiver x-Koordinate.		1	2
Wegen $\sqrt{\frac{23+k}{2k}} > 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{23+k}{2k} > 1 \;\Leftrightarrow\; 23+k > 2k \;\Leftrightarrow\; 23 > k$ ist die Forderung für $0 < k < 23$ erfüllt.			3
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 2: Analysis

Im Folgenden wird ein Querschnitt eines Flusses betrachtet. Der Graph der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit

$$f(x) = -2{,}5\,x \cdot e^{-0{,}1\,x} + 2{,}64$$

beschreibt zwischen den Nullstellen die untere Begrenzungslinie dieses Querschnitts, im Folgenden Flussbett genannt. Die Nullstellen von f sind ungefähr $1{,}2$ und 35. In der Modellierung liegt die Wasseroberfläche auf Höhe der x-Achse. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.



Der Graph der Funktion f ist zusätzlich auf dem Beiblatt vergrößert dargestellt.

a) a1) Bestimmen Sie mit Hilfe der Grafik auf dem Beiblatt sowohl die Tiefe des Flusses an der Stelle $22\,\mathrm{m}$ als auch die Steigung des Flussbetts an dieser Stelle. (4 P)

a2) Zeigen Sie, dass $f'(x) = (0{,}25x - 2{,}5) \cdot e^{-0{,}1\,x}$ gilt. (3 P)

a3) Berechnen Sie die maximale und die durchschnittliche Tiefe des Flusses für den betrachteten Querschnitt. (6 P)

a4) Bestimmen Sie mittels Integration eine Stammfunktion F von f. (5 P)

b) Im Bereich $[10; 35]$ soll das Flussbett vertieft werden. Das neue Flussbett lässt sich in diesem Intervall dann beschreiben durch die Funktion g mit

$$g(x) = 0{,}00005 \cdot (x - 16)^4 - 6{,}62.$$

b1) Vervollständigen Sie die auf dem Beiblatt abgebildete Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen von g auf das Beiblatt. (4 P)

b2) Der Graph der Funktion g kann durch eine Abfolge von Verschiebungen und Streckungen/Stauchungen aus dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = x^4$ gewonnen werden. Geben Sie eine solche Abfolge konkret an. (3 P)

b3) Geben Sie ohne weitere Rechnung die Koordinaten des tiefsten Punktes des Graphen von g an. (2 P) b4) Interpretieren Sie den folgenden Term im Sachzusammenhang:

$$\left|\frac{1}{35-1{,}2}\left(\int\limits_{1{,}2}^{10} f(x)\,dx+\int\limits_{10}^{35} g(x)\,dx\right)\right|-\left|\frac{1}{35-1{,}2}\int\limits_{1{,}2}^{35} f(x)\,dx\right|\approx 1{,}68$$

(2 P)

b5) Der Fluss soll auf einem $500\,\mathrm{m}$ langen Abschnitt vertieft werden. Für eine Abschätzung des Aushubvolumens wird davon ausgegangen, dass der Querschnitt auf diesem Abschnitt konstant ist.
Berechnen Sie das Volumen des Aushubs. (3 P)

c) Die Funktion f gehört zur Funktionenschar f_k mit

$$f_k(x)=-25\,k\cdot x\cdot e^{-kx}+2{,}64 \qquad ; \quad k>0.$$

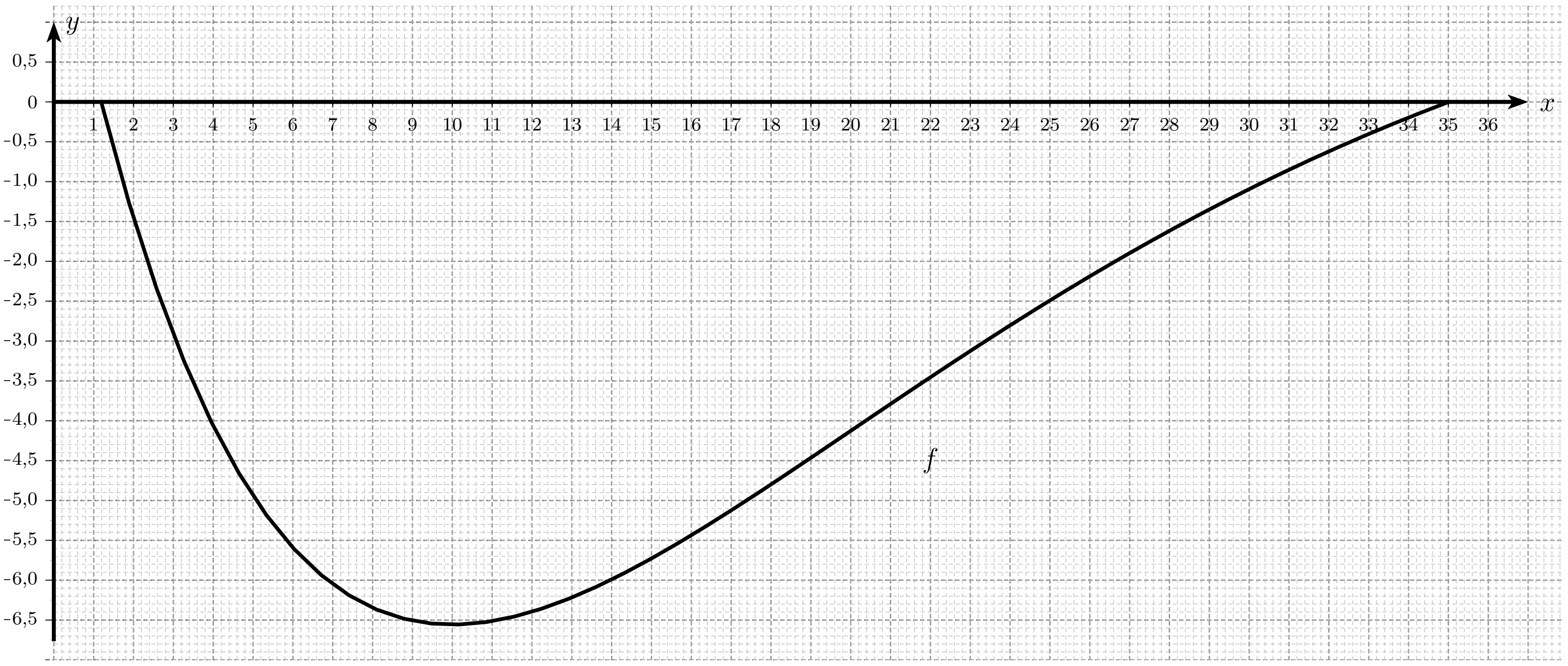
Für die Ableitungen f_k' und f_k'' gilt

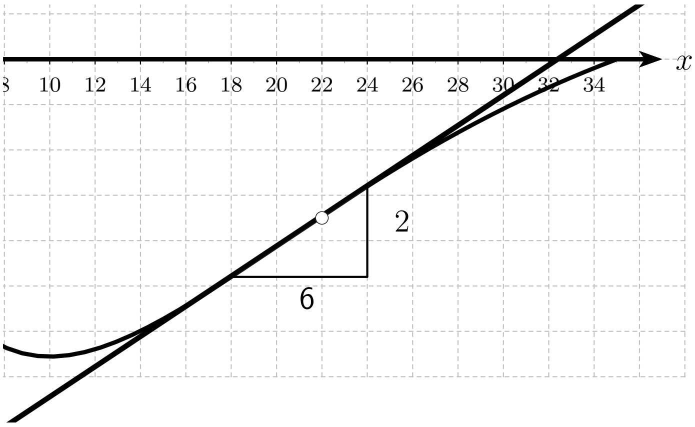
$$f_k'(x)=(-k+k^2\,x)\cdot 25\cdot e^{-kx} \quad \text{und} \quad f_k''(x)=(2k^2-k^3\,x)\cdot 25\cdot e^{-kx}.$$

c1) Für k mit $k>0$ hat die Funktion f_k genau eine Wendestelle x_w und ihr Graph genau einen Tiefpunkt an der Stelle x_t.
Zeigen Sie, dass $x_w = 2\cdot x_t$ gilt. (5 P)

c2) Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte der zur Funktionenschar f_k gehörenden Graphen auf einer zur x-Achse parallelen Geraden liegen. (3 P)

x	10	15	20	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
$g(x)$	$-6{,}6$	$-6{,}6$	$-6{,}6$	$-6{,}3$	$-6{,}1$	$-5{,}9$	$-5{,}6$	$-5{,}2$						



Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) An der Stelle $22\,\mathrm{m}$ ist der Fluss ungefähr $3{,}5\,\mathrm{m}$ tief.  Die Steigung an der Stelle $22\,\mathrm{m}$ beträgt ungefähr $0{,}33$.	1 3		
$f'(x) = -2{,}5 \cdot e^{-0{,}1\,x} + (-2{,}5\,x) \cdot (-0{,}1) \cdot e^{-0{,}1\,x}$ $= -2{,}5 \cdot e^{-0{,}1\,x} + 0{,}25\,x \cdot e^{-0{,}1\,x}$ $= (0{,}25x - 2{,}5) \cdot e^{-0{,}1\,x}$		3	
Notwendig für eine lokale Extremstelle x von f ist $f'(x) = 0$. $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (0{,}25x - 2{,}5) \cdot e^{-0{,}1\,x} = 0 \Leftrightarrow\; 0{,}25x - 2{,}5 = 0 \Leftrightarrow\; x = 10$ Da der Graph von f die x-Achse ungefähr an den Stellen $1{,}2$ und 35 schneidet und da $f(10) \approx -6{,}56$ gilt, beträgt die maximale Tiefe des Flusses im betrachteten Querschnitt ungefähr $6{,}56\,\mathrm{m}$. $\dfrac{1}{35 - 1{,}2} \displaystyle\int\limits_{1{,}2}^{35} f(x)\,dx \approx -3{,}7$ Die mittlere Tiefe des Flusses im betrachteten Querschnitt beträgt ungefähr $3{,}7\,\mathrm{m}$.	4	2	
Bestimmung einer Stammfunktion mit partieller Integration: $u(x) = -2{,}5\,x \quad ; \quad u'(x) = -2{,}5$ $v'(x) = e^{-0{,}1\,x} \quad ; \quad v(x) = -10 \cdot e^{-0{,}1\,x}$ $\int f(x)\,dx$ $= \int u(x) \cdot v'(x)\,dx + \int 2{,}64\,dx$ $= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx + \int 2{,}64\,dx$ $= -2{,}5\,x \cdot (-10 \cdot e^{-0{,}1\,x}) - \int (-2{,}5) \cdot (-10 \cdot e^{-0{,}1\,x})\,dx + \int 2{,}64\,dx$			3

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>

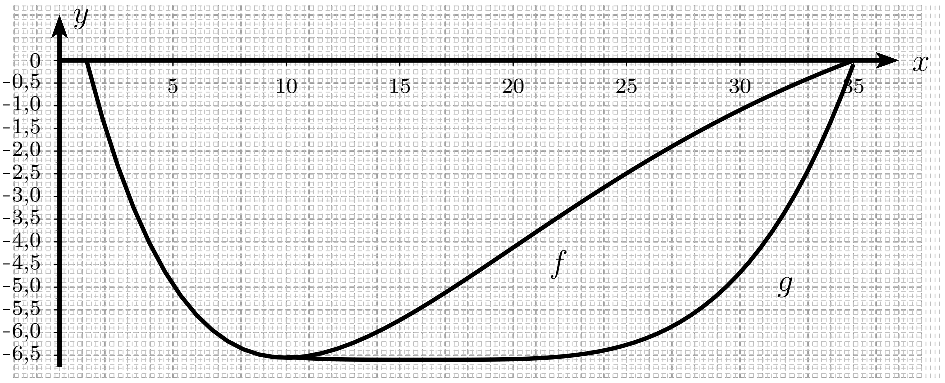
$$\begin{aligned} &= 25\,x \cdot e^{-0{,}1\,x} - \int 25 \cdot e^{-0{,}1\,x}\,dx + 2{,}64 \cdot x \\ &= 25\,x \cdot e^{-0{,}1\,x} + 250 \cdot e^{-0{,}1\,x} + 2{,}64 \cdot x + c \\ &= (25\,x + 250) \cdot e^{-0{,}1\,x} + 2{,}64 \cdot x + c \end{aligned}$$

Damit ist eine Stammfunktion der Funktion f gegeben durch
$F(x) = (25\,x + 250) \cdot e^{-0{,}1\,x} + 2{,}64 \cdot x$.

</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>

Teilaufgabe b)

<table>
<tr><td>x</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>$-6{,}6$</td><td>$-6{,}6$</td><td>$-6{,}6$</td><td>$-6{,}3$</td><td>$-6{,}1$</td><td>$-5{,}9$</td><td>$-5{,}6$</td></tr>
<tr><td>x</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>$-5{,}2$</td><td>$-4{,}7$</td><td>$-4{,}1$</td><td>$-3{,}3$</td><td>$-2{,}4$</td><td>$-1{,}4$</td><td>$-0{,}1$</td></tr>
</table>



</td><td>2
2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

Eine mögliche Abfolge ist:

1. Verschiebung in positive x-Richtung um 16 Einheiten
2. Stauchung in y-Richtung mit dem Faktor $0{,}00005$
3. Verschiebung in negative y-Richtung um $6{,}62$ Einheiten

</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>Der Punkt hat die Koordinaten $(16 \mid -6{,}62)$.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>Die mittlere Tiefe des vertieften Flussbettes ist um ca. $1{,}68\,\mathrm{m}$ größer als die mittlere Tiefe des ursprünglichen Flussbettes.</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>

$$500 \cdot \int_{10}^{35} (f(x) - g(x))\,dx \approx 28347$$

Das Volumen des Aushubs beträgt ungefähr $28\,347\,\mathrm{m}^3$.

Man kann diesen Wert auch mit der in b4) berechneten mittleren Vertiefung berechnen.

</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe c) Notwendig für eine lokale Minimalstelle x_t von f_k ist $f_k'(x_t)=0$. $f_k'(x_t)=0 \Leftrightarrow (-k+k^2\,x_t)\cdot 25\cdot e^{-kx_t}=0 \Leftrightarrow -k+k^2\,x_t=0 \Leftrightarrow x_t=\frac{1}{k}$ Notwendig für eine Wendestelle x_w von f_k ist $f_k''(x_w)=0$. $f_k''(x_w)=0 \Leftrightarrow (2k^2-k^3x_w)\cdot 25\cdot e^{-kx_w}=0 \Leftrightarrow 2k^2-k^3x_w=0 \Leftrightarrow x_w=\frac{2}{k}$ Damit folgt $x_w=2x_t$.		2 2 1	
Die Wendestelle x_w von f_k ist $\frac{2}{k}$. Damit ist $k=\frac{2}{x_w}$. Die Ortskurve der Wendepunkte ist gegeben durch $y=f_k(x_w)=-25\cdot\dfrac{2}{x_w}\cdot x_w\cdot e^{-\frac{2}{x_w}\cdot x_w}+2{,}64=-50\cdot e^{-2}+2{,}64\approx -4{,}1.$ Somit liegen alle Wendepunkte auf einer Geraden parallel zur x-Achse. *Wurde der Aufgabenteil c1) nicht gelöst, aber in diesem Aufgabenteil die Wendestelle richtig ermittelt, so sollen an dieser Stelle die beiden Punkte aus c1) vergeben werden.*			3
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

Ein Haus steht auf einem ebenen Untergrund, der durch die x_1-x_2-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems beschrieben wird.
Das Viereck $ABCD$ mit $A(2\,|\,4\,|\,4)$, $B(12\,|\,4\,|\,4)$, $C(11\,|\,8\,|\,8)$ und $D(3\,|\,8\,|\,8)$ modelliert eine Dachfläche des Hauses.
Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht $1\,\mathrm{m}$ in der Realität.

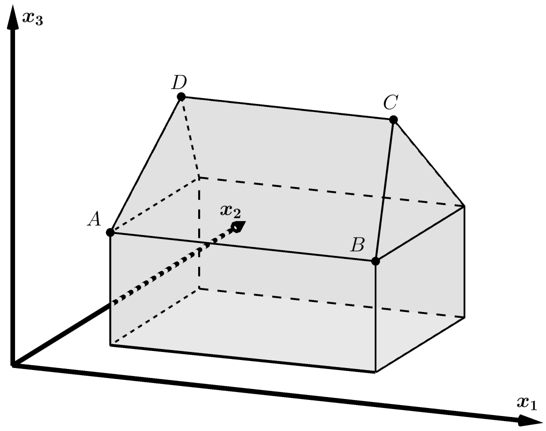


Abbildung 1

a) a1) Berechnen Sie die Länge der Dachkante $\overline{AD}$. (2 P)

a2) Berechnen Sie den Winkel, den die Dachkanten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ einschließen. (3 P)

a3) Zeigen Sie, dass die Dachfläche $ABCD$ ein symmetrisches Trapez ist und bestimmen Sie ihren Flächeninhalt. (7 P)

a4) Bestimmen Sie den Abstand der durch die Punkte C und D verlaufenden Geraden vom Koordinatenursprung. (4 P)

a5) Ergänzen Sie das in der Abbildung 1 eingezeichnete Koordinatensystem um eine Skalierung der x_1- und der x_2-Achse. (2 P)

Im Garten des Hauses steht ein hoher Fahnenmast (siehe Abbildung 2), dessen Fuß sich im Koordinatenursprung und dessen Spitze sich im Punkt $S(0\,|\,0\,|\,11{,}4)$ befindet.
Das Sonnenlicht fällt zu einem bestimmten Zeitpunkt aus der durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegebenen Richtung ein.
Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\vec{v}$ und verläuft durch den Punkt S.

b) Die vier Punkte A, B, C und D liegen in der Ebene E_{ABCD}.

b1) Bestimmen Sie eine Ebenengleichung der Ebene E_{ABCD} in Koordinatenform.
[zur Kontrolle: $E_{ABCD}:\ -x_2 + x_3 = 0$] (3 P)

b2) Bestimmen Sie den Winkel, unter dem die Gerade g die Ebene E_{ABCD} schneidet. (3 P)

b3) Es sei S' der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E_{ABCD}.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S'.
[zur Kontrolle: $S'(11{,}4\,|\,5{,}7\,|\,5{,}7)$] (4 P)

b4) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Punkt S' innerhalb des Trapezes $ABCD$ liegt, und interpretieren Sie diese Tatsache im Sachzusammenhang. (5 P)

c) Das Haus hat wie in Abbildung 2 dargestellt einen Anbau in Form eines Halbzylinders der Höhe $3{,}5\,\mathrm{m}$ erhalten.

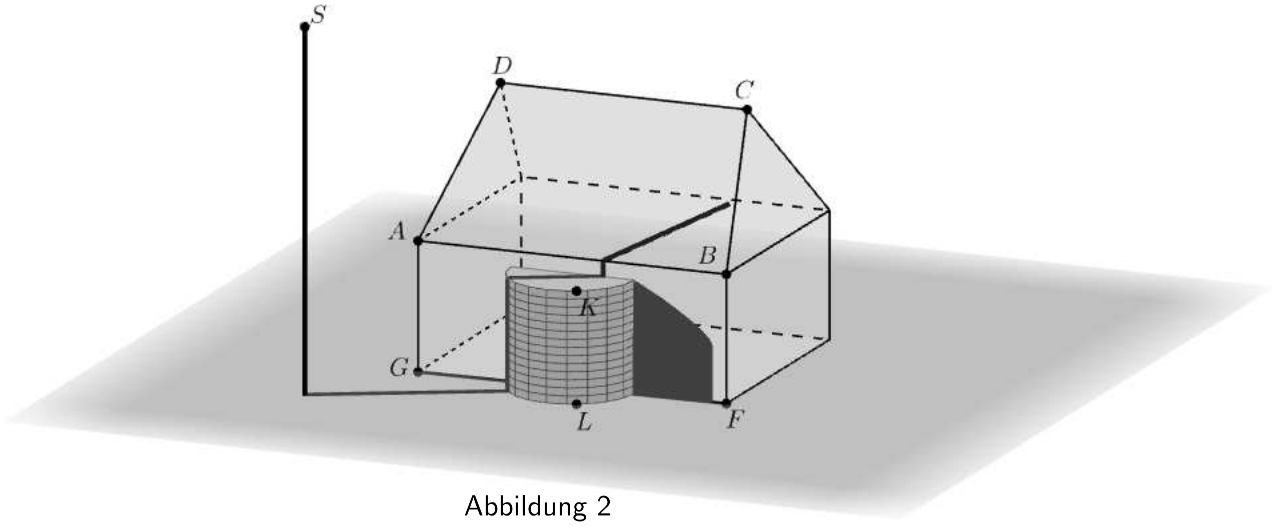


Abbildung 2

Die Grundfläche des entsprechenden Zylinders hat einen Radius von $2\,\mathrm{m}$ und den Mittelpunkt $M(7\,|\,4\,|\,0)$.
Außerdem sind die Punkte $K(7+\frac{2}{5}\sqrt{5}\,|\,4-\frac{4}{5}\sqrt{5}\,|\,\frac{7}{2})$ und $L(7+\frac{2}{5}\sqrt{5}\,|\,4-\frac{4}{5}\sqrt{5}\,|\,0)$ gegeben.

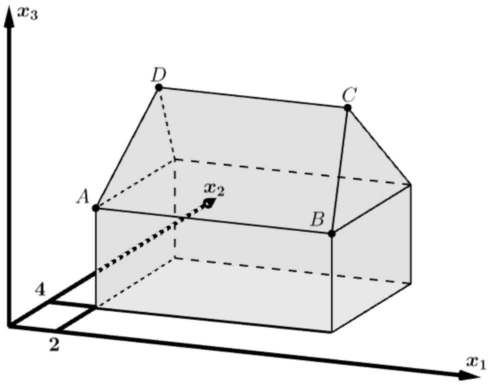
c1) Die Dachkante des Anbaus hat die Form eines Halbkreises.
Zeigen Sie, dass der Punkt K auf diesem Halbkreis liegt. (3 P)

Die Ebene E_S berührt den Anbau in der Strecke $\overline{KL}$.

c2) Bestimmen Sie eine Ebenengleichung der Ebene E_S. (3 P)

c3) Die Ebene E_S verläuft parallel zur Geraden g.
Geben Sie die Bedeutung von E_S hinsichtlich des in Abbildung 2 dargestellten Schattenbildes des Anbaus auf der Hauswand $BAGF$ an. (1 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix}$, $\lvert\overrightarrow{AD}\rvert=\sqrt{33}\approx 5{,}74$ Die Länge der Dachkante $\overline{AD}$ beträgt ungefähr $5{,}74\,\mathrm{m}$.	2		
$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}$ Der von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ eingeschlossene Winkel α ergibt sich zu $\alpha=\arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix}}{10\cdot\sqrt{33}}\right)\approx 80{,}0^\circ$.	3		
$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-1\\4\\4\end{pmatrix}$ Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ sind parallel zueinander, das Viereck $ABCD$ ist damit ein Trapez. Wegen $\left\lvert\overrightarrow{AD}\right\rvert=\sqrt{33}=\left\lvert\overrightarrow{BC}\right\rvert$ ist das Trapez entweder ein Parallelogramm oder achsensymmetrisch. Wegen $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert=10\neq 8=\left\lvert\overrightarrow{DC}\right\rvert$ ist es kein Parallelogramm und damit achsensymmetrisch. Mit den Mittelpunkten $M_{AB}(7\,\vert\,4\,\vert\,4)$ bzw. $M_{DC}(7\,\vert\,8\,\vert\,8)$ der zueinander parallelen Seiten des symmetrischen Trapezes sowie $\left\lvert\overrightarrow{M_{AB}M_{DC}}\right\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}\right\rvert=4\sqrt{2}$ ist $\frac{10+8}{2}\cdot 4\sqrt{2}=36\sqrt{2}\approx 50{,}91$ der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$. Die Dachfläche hat also einen Flächeninhalt von ca. $51\,\mathrm{m}^2$.	3	4	
Die durch C und D verlaufende Gerade ist gegeben durch die Punktmenge $(x\,\vert\,8\,\vert\,8)$ mit $x\in\mathbb{R}$. Unter den Punkten in dieser Menge hat der Punkt $(0\,\vert\,8\,\vert\,8)$ den geringsten Abstand vom Koordinatenursprung. Dieser Abstand ist $\sqrt{(0-0)^2+(8-0)^2+(8-0)^2}=8\sqrt{2}\approx 11{,}314$.		4	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
 *Die Aufgabe ist gelöst, wenn auf jeder der beiden Achsen mindestens eine Skalierungsmarke korrekt gesetzt wurde.*		2	
Teilaufgabe b) Mit $\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-40\\40\end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E_{ABCD}. Wegen $-x_2+4+x_3-4=0$ ist $-x_2+x_3=0$ eine Ebenengleichung der Ebene E_{ABCD} in Koordinatenform.		3	
Es ist $\arcsin\left(\frac{\left\lvert\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rvert}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}\right)\approx 35{,}3°$. Die Gerade g schneidet die Ebene E_{ABCD} also unter einem Winkel von ungefähr $35°$.		3	
$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\11{,}4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $g\cap E_{ABCD}$: $-r+(11{,}4-r)=0\Leftrightarrow -2r+11{,}4=0\Leftrightarrow r=5{,}7$ Einsetzen von $r=5{,}7$ in die Geradengleichung liefert den Schnittpunkt $S'(11{,}4\mid 5{,}7\mid 5{,}7)$.	1 3		
$\begin{pmatrix}11{,}4\\5{,}7\\5{,}7\end{pmatrix}=\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{BA}+s\overrightarrow{BC}$ Die zweite und dritte Komponente liefern $s=\frac{1{,}7}{4}=\frac{17}{40}$. Einsetzen in die erste Komponente ergibt mit $11{,}4=-10\,r-\frac{17}{40}+12$ somit $r=\frac{7}{400}$. Wegen $r<\frac{1}{2}$ und $s<\frac{1}{2}$ liegt der Punkt S' im Dreieck ABC und somit im Trapez $ABCD$. Der Schatten der Fahnenmastspitze liegt also auf der betrachteten Dachfläche.		2	2 1

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) Für jeden Punkt $X(x_1 \,\vert\, x_2 \,\vert\, x_3)$ auf dem der Dachkante des Anbaus entsprechenden Halbkreises muss $x_3 = 3{,}5$ und $x_2 \leq 4$ gelten. Diese Bedingungen erfüllt der Punkt K.			1
Ferner muss für jeden Punkt $X(x_1 \,\vert\, x_2 \,\vert\, x_3)$ auf dem der Dachkante des Anbaus entsprechenden Halbkreises $\left\vert \begin{pmatrix} x_1 - 7 \\ x_2 - 4 \\ x_3 - 3{,}5 \end{pmatrix} \right\vert = 2$ gelten. Mit $\left\vert \begin{pmatrix} 7 + \frac{2}{5}\sqrt{5} - 7 \\ 4 - \frac{4}{5}\sqrt{5} - 4 \\ 3{,}5 - 3{,}5 \end{pmatrix} \right\vert = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\sqrt{5}\right)^2} = 2$ erfüllt der Punkt K auch diese Bedingung.			2
Mit $\overrightarrow{LM} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{4}{5}\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{2}{5}\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E_S. Damit ist durch $x_1 - 2\,x_2 = (7 + \frac{2}{5}\sqrt{5}) - 2 \cdot (4 - \frac{4}{5}\sqrt{5}) = -1 + 2\sqrt{5}$ eine Ebenengleichung der Ebene E_S in Koordinatenform gegeben.			3
Die rechte Begrenzungslinie des vom Anbau auf die Hauswand $BAGF$ fallenden Schattens liegt in der Ebene E_S.			1
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 4: Stochastik

Alle in Ihren Lösungen verwendeten Zufallsgrößen müssen explizit eingeführt werden. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsgrößen.

a) In einem Verkaufstresen liegen zwei unterschiedliche Arten von Smartphone-Displays. Es sind zum einen 8 Flüssigkristall-Displays (LCDs) und zum anderen 17 Displays mit organischen Leuchtdioden (OLEDs). Die unterschiedlichen Displays sind von außen nicht zu unterscheiden. Aus dem Verkaufstresen werden zufällig zwei Displays nacheinander ohne Zurücklegen entnommen.

a1) Erstellen Sie ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm für diesen Sachverhalt. (4 P)

a2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, genau ein OLED zu ziehen. (2 P)

a3) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, als zweites ein LCD zu ziehen unter der Voraussetzung, dass das erste entnommene Display ein OLED war. (1 P)

Im Folgenden wird die Produktion von OLEDs betrachtet. Bei dem verwendeten Produktionsverfahren weisen $4\,\%$ aller hergestellten Displays einen Defekt auf.

b) Eine Firma stellt stündlich 50 OLEDs her.

b1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Stunde kein defektes Display produziert wird. (2 P)

b2) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einer Stunde mehr als ein, aber höchstens vier defekte Displays hergestellt werden. (3 P)

b3) Ermitteln Sie, nach wie vielen ganzen Produktionsstunden die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein defektes Display produziert wurde, erstmalig größer als $99\,\%$ ist. (4 P)

b4) Berechnen Sie näherungsweise mithilfe der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in 1000 Produktionsstunden höchstens 1900 defekte Displays hergestellt werden. (4 P)

Nach der Umstellung auf ein neues Produktionsverfahren ist der Anteil defekter Displays auf über $4\,\%$ gestiegen.

c) Für einige Container voller Displays lässt sich nicht mehr zurückverfolgen, mit welchem der beiden Verfahren die darin befindlichen Displays produziert wurden. Um zu entscheiden, ob ein Container mit Displays gefüllt ist, die im alten oder aber im neuen Verfahren hergestellt wurden, wird ein rechtsseitiger Signifikanztest entworfen.

Aus dem Container werden 250 Displays zufällig entnommen und auf Funktionalität geprüft. Es wird folgende Entscheidungsregel festgelegt: „Falls mehr als 16 Displays defekt sind, wird davon ausgegangen, dass die Displays in diesem Container mit dem neuen Produktionsverfahren hergestellt worden sind.“

c1) Zeigen Sie, dass bei diesem rechtsseitigen Signifikanztest die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art weniger als $2{,}45\,\%$ beträgt. (5 P)

c2) Beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers 2. Art in diesem Sachzusammenhang und bestimmen Sie dessen Wahrscheinlichkeit unter der Annahme, dass beim neuen Produktionsverfahren die Wahrscheinlichkeit für ein defektes Display doppelt so groß ist wie beim alten. (4 P)

d) Es werden von den Displays, die im neuen Produktionsverfahren hergestellt werden, 300 zufällig ausgewählt und getestet. Davon sind 28 defekt.

Ermitteln Sie die größte Wahrscheinlichkeit p_{max}, bei der die folgende Hypothese bei diesem Testergebnis auf einem Signifikanzniveau von $3\,\%$ nicht verworfen wird, bei einem Testergebnis von 29 hingegen schon:

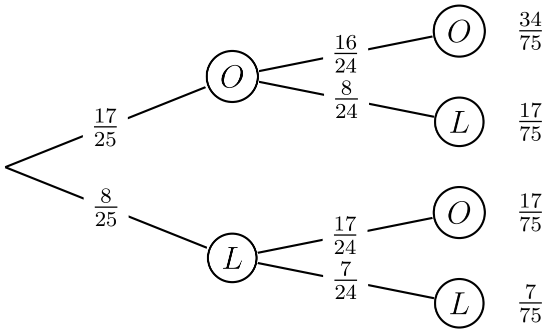
„Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im neuen Produktionsverfahren ein defektes Display produziert wird, ist kleiner oder gleich p_{max}.“

Die Wahrscheinlichkeit p_{max} soll dabei in Prozent mit einer Nachkommastelle angegeben werden. (5 P)

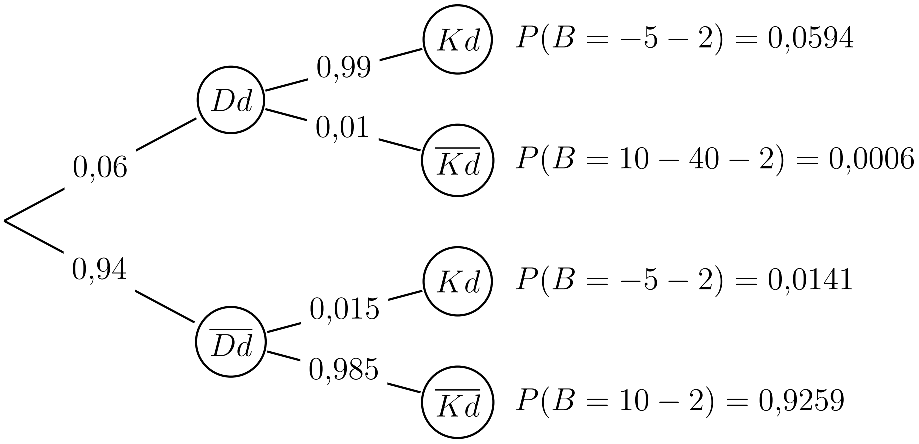
e) Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass $6\,\%$ der hergestellten Displays defekt sind. Beim Verkauf eines Displays werden 10 € Einnahmen erzielt. Ist dieses Display defekt, entstehen Ausgaben von 40 € für die Rückabwicklung des Verkaufs und die Entsorgung.

Die produzierten Displays können elektronisch getestet werden, bevor sie in den Handel gehen. Das Kontrollverfahren erkennt mit einer Wahrscheinlichkeit von $99\,\%$ ein defektes Display korrekt. Allerdings wird ein funktionierendes Display mit einer Wahrscheinlichkeit von $1{,}5\,\%$ fälschlicherweise als defekt erkannt und entsorgt. Die Entsorgung eines aussortierten Displays kostet 5 €.

Untersuchen Sie, ob das Kontrollverfahren wirtschaftlich ratsam ist, wenn die Kontrolle eines Displays 2 € kostet. (6 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Es seien O: „Ziehung eines OLED“ und L: „Ziehung eines LCD“. Dann folgt:  	4		
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $P(O,L) + P(L,O) = \frac{17}{25} \cdot \frac{8}{24} + \frac{8}{25} \cdot \frac{17}{24} = \frac{34}{75} \approx 45{,}33\,\%$.	2		
Ablesen aus dem Baumdiagramm liefert $P_O(L) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\,\%$.	1		
Teilaufgabe b) Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der defekten Displays. X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 50$ und $p = 0{,}04$. $P(X = 0) \approx 12{,}99\,\%$	1 1		
$P(1 < X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 1)$ $\approx 0{,}9510 - 0{,}4005 = 0{,}5505 = 55{,}05\,\%$	3		
Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße X_n : „Anzahl der defekten Displays“ mit den Parametern n und $p = 0{,}04$. Da $P(X_{100} > 0) = 1 - P(X_{100} = 0) \approx 1 - 0{,}0169 = 0{,}9831 < 99\,\%$ und $P(X_{150} > 0) \approx 1 - 0{,}0022 = 0{,}9978 > 99\,\%$ gilt, ist nach drei Produktionsstunden die betrachtete Wahrscheinlichkeit erstmals auf über $99\,\%$ gestiegen.		1 3	
Die Zufallsgröße X: „Anzahl der defekten Displays“ ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 1000 \cdot 50 = 50000$ und $p = 0{,}04$. Somit sind $E(X) = n \cdot p = 2000$ und $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50000 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96} \approx 43{,}82$. Mit der Näherungsformel von Moivre und Laplace folgt $P(X \leq 1900) \approx \Phi_{2000\,;\,43{,}82}(1900 + 0{,}5) = \Phi_{0;1}\left(\frac{1900+0{,}5-2000}{43{,}82}\right)$ $\approx 0{,}0116 = 1{,}16\,\%$.		2 2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) Die Zufallsvariable X_p beschreibt die Anzahl der defekten Displays. X_p ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 250$ und p. Der hier vorliegende rechtsseitige Signifikanztest verwendet die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0{,}04$ und den Verwerfungsbereich $V = \{17, \ldots, 250\}$. Wegen $P(X_{0{,}04} > 16) = 1 - P(X_{0{,}04} \leq 16) \approx 1 - 0{,}9756 = 2{,}44\,\%$ beträgt die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art weniger als $2{,}45\,\%$. *Bei dieser Aufgabenstellung kann als Nullhypothese auch $H_0 : p = 0{,}04$ gewählt werden.*		2 3	
Der Fehler 2. Art tritt ein, wenn bei der Testdurchführung unter den 250 geprüften Displays höchstens 16 defekte vorzufinden sind und somit die Nullhypothese nicht verworfen wird, obwohl die Displays im vorliegenden Container in Wirklichkeit mit dem neuen Produktionsverfahren hergestellt wurden, und somit ein erhöhter Anteil defekter Displays vorliegt. Mit $p = 2 \cdot 0{,}04 = 0{,}08$ ist $\beta = P(X_{0{,}08} \leq 16) \approx 0{,}2103 = 21{,}03\,\%$.		2 2	
Teilaufgabe d) Die Zufallsvariable X_p beschreibt die Anzahl der defekten Displays. X_p ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 300$ und p. Es ist die größte Wahrscheinlichkeit p_{max} gesucht, bei der der rechtsseitige Hypothesentest mit der Nullhypothese $H_0 : p \leq p_{max}$ den Verwerfungsbereich $V = \{29\,; \ldots ;\, 300\}$ besitzt. Wegen des Signifikanzniveaus von $3\,\%$ muss $P(X_{p_{max}} \geq 29) = 0{,}03$ bzw. $P(X_{p_{max}} \leq 28) = 0{,}97$ gelten. Da $P(X_{0{,}066} \leq 28) \approx 0{,}9737 > 0{,}97$ ist, aber $P(X_{0{,}067} \leq 28) \approx 0{,}9688 < 0{,}97$ gilt, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p_{max} = 6{,}6\ldots\,\%$.			2 3

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe e) Die Zufallsvariable B beschreibt die Bilanz aus Einnahmen und Ausgaben.		1	
Ohne Verwendung des Kontrollverfahrens ergibt sich $E(B) = 10 \cdot 0{,}94 - 30 \cdot 0{,}06 = 7{,}6$.			1
Die Verteilung von B unter Verwendung des elektronischen Kontrollverfahrens ergibt sich mithilfe des folgenden Baumdiagramms. Dabei seien Dd: „Das Display ist defekt.“ und Kd: „Das Kontrollverfahren nennt das Display defekt“.  *Das Baumdiagramm ist vom Prüfling nicht gefordert. Die Kosten von 2 € für den einzelnen Test können auch anschließend subtrahiert werden.*			
Damit ist $E(B) = (-32) \cdot 0{,}0006 + (-7) \cdot 0{,}0735 + 8 \cdot 0{,}9259 \approx 6{,}87$.			3
Es entsteht im Mittel mithilfe des Kontrollverfahrens eine Bilanz von 6,87 € pro Display und ohne das Kontrollverfahren eine Bilanz von 7,60 € pro Display. Somit ist das Kontrollverfahren nicht ratsam.			1
Punktsummen	12	18	10